

DOI: <https://doi.org/10.34069/AI/2021.41.05.9>

## Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica<sup>27</sup>

### Argumentation in mathematics education: elements for the design of studies from the literature review

Received: April 10, 2021

Accepted: May 30, 2021

Written by:

**Wilmer Ríos-Cuesta**<sup>28</sup><https://orcid.org/0000-0001-8129-2137>

#### Resumen

Diversos estudios han comentado la importancia de la argumentación en la construcción de conocimiento matemático y las implicaciones en el desarrollo de competencias. Estos estudios han centrado su mirada en el análisis de la actividad discursiva en el aula en torno a la construcción individual y colectiva de argumentos válidos. Otros, en cambio, en la cognición que desarrollan los estudiantes en las interacciones en clase y tratan de acercarlos a los procesos de prueba mediante la presentación de argumentos deductivos. Sin embargo, son diversas las posturas sobre lo que se entiende como argumentación, al punto que algunos conciben la prueba como una forma particular de argumentación. En este estudio se presenta un análisis documental que resulta útil para futuras investigaciones en educación matemática al develar algunas posturas encontradas en investigaciones sobre argumentación, así como algunos marcos teóricos predominantes para analizar los actos de habla, de modo que les permita a los investigadores posicionarse de acuerdo con el tipo de investigación que desarrollen. Se destaca el uso del modelo de Toulmin para tipificar argumentos y la propuesta del modelo *ckø* para indagar en los conocimientos que movilizan los estudiantes en los procesos de argumentación.

**Palabras clave:** Análisis de Argumentos, Argumentación en Matemáticas, Discurso en el Aula, Tipos de Argumentos, Revisión Documental.

#### Abstract

Several studies have commented on the importance of argumentation in the construction of mathematical knowledge and its implications in the development of competencies. These studies have focused on the analysis of discursive activity in the classroom around the individual and collective construction of valid arguments. Others, on the other hand, focus on the cognition developed by students in classroom interactions and try to bring them closer to the proof processes through the presentation of deductive arguments. However, the positions on what is understood as argumentation are diverse, to the point that some conceive proof as a particular form of argumentation. This study presents a documentary analysis that is useful for future research in mathematics education by revealing some positions found in research on argumentation, as well as some predominant theoretical frameworks for analyzing speech acts, in order to allow researchers to position themselves according to the type of research they develop. The use of Toulmin's model to typify arguments and the proposal of the *ckø* model to investigate the knowledge mobilized by students in the argumentation process are highlighted.

**Keywords:** Argument Analysis, Argumentation in Mathematics, Classroom Discourse, Types of Arguments, Documentary Review.

<sup>27</sup> Artículo derivado del proyecto de tesis doctoral Implicaciones de la interactividad en la argumentación en clase de matemáticas por estudiantes de secundaria desarrollado en la Universidad del Valle.

<sup>28</sup> Licenciado en Matemáticas y Física, Magíster en Educación, estudiante de Doctorado en Educación, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Colombia.

## Introducción

Las investigaciones sobre argumentación en educación matemática se sitúan en la línea de razonamiento, argumentación y prueba en el Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática -PME-.

En el Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 11- realizado en febrero de 2019, se presentaron propuestas relacionadas con la argumentación y prueba que fueron abordadas en el Thematic Working Group 1 (TWG1), de estas, 30 fueron artículos y 11 posters.

De acuerdo con Stylianides et al. (2019), las contribuciones presentadas hacen referencia a puntos de vista matemáticos, lógicos, históricos, filosóficos, epistemológicos, psicológicos, curriculares, antropológicos y sociológicos. Entre los temas tratados se abordaron aspectos relacionados con la argumentación y prueba a nivel escolar, en la formación del profesorado, diseño de tareas para promover la argumentación, estudios de intervención, evaluación y análisis de la argumentación y la prueba, perspectivas teóricas y filosóficas de la argumentación (Stylianides et al., 2019), lo cual nos brinda una visión sobre los intereses investigativos.

Estos estudios ponen en el centro de la actividad matemática, la actividad discursiva en el aula y la emisión de argumentos con algunos propósitos como validar, convencer y disentir. Para lograr este objetivo el profesor busca promover la discusión de tareas en clase para alentar el debate y la confrontación de ideas, lo cual permite la negociación de significados y la evolución de los argumentos (Acosta & Hermosa, 2015; Benítez et al., 2016; Ríos-Cuesta, 2020). Desde esta perspectiva, la argumentación tiene un carácter retórico (Durango, 2017; Habermas, 1999), pues apunta a la persuasión del auditorio, lo cual genera un ambiente para promover algunos tipos de argumentos en los estudiantes.

Otros estudios buscan acercarse a los estudiantes a los procesos de prueba y sitúan la mirada en las cualidades lógicas y en la estructura de los argumentos (Fiallo, 2010; Fiallo y Gutiérrez, 2017; Molina, 2019; Otten et al., 2017). Esta perspectiva se enfoca en el carácter lógico de la argumentación y en la tipificación de los argumentos en clase. Desde esta postura interesa identificar la cadena de razonamientos usados para la construcción del argumento, luego se clasifican en inductivos, abductivos y

deductivos. Sin embargo, algunos estudios ofrecen una clasificación mayor como se mostrará más adelante. Lo usual en este tipo de estudios es el uso del modelo de Toulmin o la reducción que propone Krummheuer a dicho modelo.

Desde la perspectiva dialéctica interesa conocer los procesos pragmáticos de la argumentación que buscan analizar la estructura de los argumentos en un contexto donde coinciden, en el mismo espacio, un emisor y un receptor (Habermas, 1999; Nielsen, 2011; Simpson, 2015). En estos estudios, los argumentos tienen el propósito de justificar o refutar buscando defender un punto de vista.

Por otro lado, La National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] declaró que uno de los objetivos de la educación matemática es ayudar a que los estudiantes produzcan argumentos matemáticos como una oportunidad para aprender matemáticas (NCTM, 2000). Krummheuer (2015) asume una postura sobre aprender matemáticas la cual se aleja de la acumulación de información y se vincula con la participación en clase y la define como:

En lo que respecta al aprendizaje de las matemáticas, se suele asumir que el sentido de la argumentación matemática es una condición previa a la posibilidad de aprender matemáticas y no sólo el resultado deseado. En este sentido, el aprendizaje de las matemáticas es un aprendizaje argumentativo. (p. 53)

A partir de allí, en los actuales currículos se plantea la formación de ciudadanos críticos y reflexivos con el conocimiento y capaces de razonar (De Gamboa et al., 2010). Desde entonces, las investigaciones sobre argumentación en matemáticas han ido en aumento. Se han hecho estudios para enseñar a probar a estudiantes de educación secundaria buscando un nicho para su implementación en el currículo (Fiallo, 2010).

Sin embargo, estudios como los de Goizueta (2015) y Goizueta (2019), señalan que los estudiantes tienen dificultades para justificar lo que hacen y dicen en la clase de matemáticas, esto dificulta la inclusión de tareas matemáticas más complejas favoreciendo la planeación de actividades en las que los estudiantes practican la ejecución de algoritmos prescritos por el profesor. Planas (2007), menciona que, en otros casos, los estudiantes presentan justificaciones

de sus ideas sin una relación con las ideas ya expresadas.

Ante la exigencia permanente de argumentos por parte del profesor hacia los estudiantes, donde se les solicita justificar sus razonamientos, estos suelen cambiar sus respuestas pues asumen que el procedimiento empleado es incorrecto. Esto indica la falta de conciencia sobre el uso de un determinado algoritmo o la evidencia de un aprendizaje memorístico con poca comprensión de la actividad matemática que se desarrolla en el aula.

El objetivo de este estudio fue identificar corrientes investigativas en argumentación en educación matemática y poner de relieve algunas cuestiones relevantes en los estudios desarrollados en esta línea de investigación, se proponen elementos para la discusión en torno a algunas preguntas que no se han respondido y que permiten reflexionar sobre las tendencias investigativas y los marcos de análisis predominantes.

### Metodología

Se presenta un estudio de corte cualitativo interpretativo. Se hizo un análisis documental que buscó contextualizar las tendencias en argumentación y las alternativas que tienen los investigadores noveles que se interesan por esta línea de investigación, lo que lo convierte en un insumo para la toma de decisiones, establecer el camino del análisis de los datos y tipificar los argumentos en clase. En ese sentido, se buscaron documentos que ayudaran a identificar tres aspectos fundamentales en la línea de investigación que son: la forma de tipificar/clasificar argumentos, las posturas sobre argumentación y los marcos de análisis usados para examinar la estructura de los argumentos, los cuales, a su vez, constituían las categorías de análisis. Las bases de datos utilizadas corresponden a Springer, SciELO, Scopus, Web of Science, Google Académico, Elsevier y Eric, en un intervalo de 2015-2020.

### Resultados y discusión

#### Primera categoría: tipología de los argumentos

Algunas investigaciones hechas en esta línea buscan identificar los tipos de razonamientos de los estudiantes de acuerdo con el tipo de argumento emitido. Pedemonte y Reid (2010), hacen una distinción entre argumentos abductivos, deductivos e inductivos. Los

argumentos abductivos parten de las implicaciones para llegar a las consecuencias; en este tipo de argumentos la conclusión es extraída a partir de una serie de premisas. Los argumentos deductivos parten de una premisa universal para llegar a una conclusión particular, también de una premisa particular para llegar a una conclusión particular o de una premisa universal para llegar a una conclusión universal; en estos argumentos la información de la conclusión está contenida en las premisas. Los argumentos inductivos parten del análisis u observación de casos particulares en los que la persona produce una generalización a partir de casos concretos.

Otra tipificación de los argumentos sugiere hacer una distinción entre argumentos inductivos, abductivos, deductivos, o por analogía (Conner et al., 2014; Reid y Knipping, 2010). Este último es el resultado de la comparación de las semejanzas entre dos estructuras y con base en ella hacer inferencias. Se encontró que hay interés por desarrollar modelos integrales para analizar los argumentos reconociendo en ellos cualidades lógicas, dialécticas y retóricas (Durango, 2017). Precisamente por sus cualidades retóricas podemos hacer una distinción entre argumentación y prueba si se tiene en cuenta el público objetivo y la función del argumento. Por ejemplo, Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006), mencionan que para probar en matemáticas no se requiere la adhesión de un público, basta con una cadena de razonamientos de tipo deductivo construidos en el sistema axiomático propio de las matemáticas para validar el conocimiento. Es decir, no se busca convencer a otros, contrario a lo que busca un argumento de tipo retórico o dialéctico que busca la adhesión del público.

Estudios recientes agregan una distinción a los tipos de argumentos que son usados por los estudiantes y los clasifican como formales e informales, dentro de los argumentos informales mencionan los argumentos visuales, los cuales se basan en el uso de imágenes o representaciones de los objetos matemáticos que son tomados como datos por los estudiantes para argumentar (Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2018; Crespo, 2007; Estrella et al., 2017; Llanos et al., 2007). En cambio, los argumentos formales se basan en el uso de un sistema axiomático formal propio de las matemáticas, es decir, se fundamenta en el uso de definiciones, teoremas, axiomas, entre otros (Viholainen, 2008).

Otra clasificación sobre los tipos de argumentos es la mencionada por Krummheuer (1995, 2007), quien distingue entre argumentos analíticos y

sustanciales. Dicho autor concibe como argumentos analíticos aquellos que se originan por deducciones lógicas. En cambio, los argumentos sustanciales son aquellos que resultan de la extensión de significados y sirven para explicar razones.

### **Segunda categoría: posturas en torno a la argumentación**

Los estudios sobre argumentación en clase de matemáticas han permitido analizar la actividad discursiva en el aula en torno a la construcción individual o colectiva de argumentos válidos (Baudino et al., 2019). Algunos estudios centran su mirada en la cognición que desarrolla el estudiante en su interacción con el profesor o con sus pares (Ayalon & Hershkowitz, 2018; Chico, 2014, 2018; Erkek & İşiksal-Bostan, 2019; Hoyos, 2018; Kukliansky, 2019; McCrone, 2005; Muller-Mirza et al., 2009; Ruiz, 2012; Yopp, 2015), otros en cambio, buscan acercar a los estudiantes a procesos de prueba mediante la presentación de argumentos deductivos concibiendo la prueba como una forma particular de argumentación (Balacheff y Margolinas, 2005; Camargo, 2010; Fiallo, 2010; Fiallo y Gutiérrez, 2017; Molina, 2019; Pedemonte y Balacheff, 2016), también encontramos estudios que reportan una distancia o ruptura cognitiva entre argumentación y prueba, ofreciendo una distinción en cuanto al propósito de cada una (Duval, 1991; Duval, 1999; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 2006).

Más allá de las posturas con que se aborden las investigaciones, una cuestión latente es la falta de consenso sobre lo que se entiende como argumentación y prueba, así como sus vínculos o distancia. Se ponen a consideración algunas ideas para aportar a la discusión.

Krummheuer (1995), asume la argumentación como un fenómeno social que puede ser colectivo o individual en el que se busca la veracidad o falsedad de una afirmación. Este autor pone el énfasis en la interacción de los estudiantes. Por otro lado, Duval (1999), distingue entre argumento y prueba aduciendo que la prueba es un razonamiento válido, en tanto un argumento busca la pertinencia.

Otra perspectiva es presentada por Rojas (2006), quien señala que argumentar es hacer uso del lenguaje verbal para convencer o persuadir, en forma razonada, a otros sobre una cuestión o asunto, al hacerlo se parte de una premisa que se supone cierta y mediante prácticas explicativas se relacionan los datos y se concluye de manera

convinciente. Una postura similar es adoptada por Rumsey y Langrall (2016), quienes además afirman que la argumentación brinda la posibilidad de que los estudiantes puedan socializar procedimientos, respuestas y puntos de vista sobre la actividad que desarrollan, de tal suerte que se pueden construir argumentos viables y se pueden criticar los razonamientos de los otros estudiantes.

Para Muller-Mirza et al. (2009), la argumentación es una actividad de tipo cognitivo que involucra habilidades de la lógica y el razonamiento. Esta visión sobre argumentación le da una importancia al diálogo e involucra varias dimensiones del individuo como la cognitiva, la afectiva y la comunicativa, lo cual enriquece las situaciones dentro del aula. Sin embargo, se vuelve tan compleja que sólo parece surgir en determinados contextos que vinculan aspectos cognitivos y sociales.

Por otro lado, Crespo, Farfán y Lezama (2010), conciben la prueba como una práctica social que es llevada a cabo por la comunidad matemática como mecanismo de validación de sus producciones. Al considerarla como una práctica social y mirarla en el marco de la Teoría Socioepistemológica, las prácticas sociales que dan origen al conocimiento cambian entre las diferentes comunidades. De cierto modo, cobran sentido los procesos de validación que se gestan al interior del aula, y la forma como cada comunidad concibe la prueba y a qué le llaman probar.

De acuerdo con Goizueta y Planas (2013), la argumentación es un proceso mediante el cual se produce un discurso conectado lógicamente sin que ello implique que sea deductivo. Por el contrario, van Eemeren et al. (2013), ven la argumentación como una actividad verbal y social de la razón en la que se busca la aceptación o el rechazo de un punto de vista mediante la presentación de proposiciones que buscan justificarlo o refutarlo. Una perspectiva similar es presentada por Fiallo y Gutiérrez (2017), quienes definen la argumentación como una secuencia de enunciados verbales basados en elementos matemáticos que buscan explicar algún resultado. Solar (2018), en cambio, hace una distinción entre argumentación en el aula de matemáticas y argumentación matemática, la primera entendida como el proceso que busca convencer a otro y la segunda está asociada con la prueba que realiza un resolutor, donde no necesariamente median varios puntos de vista.

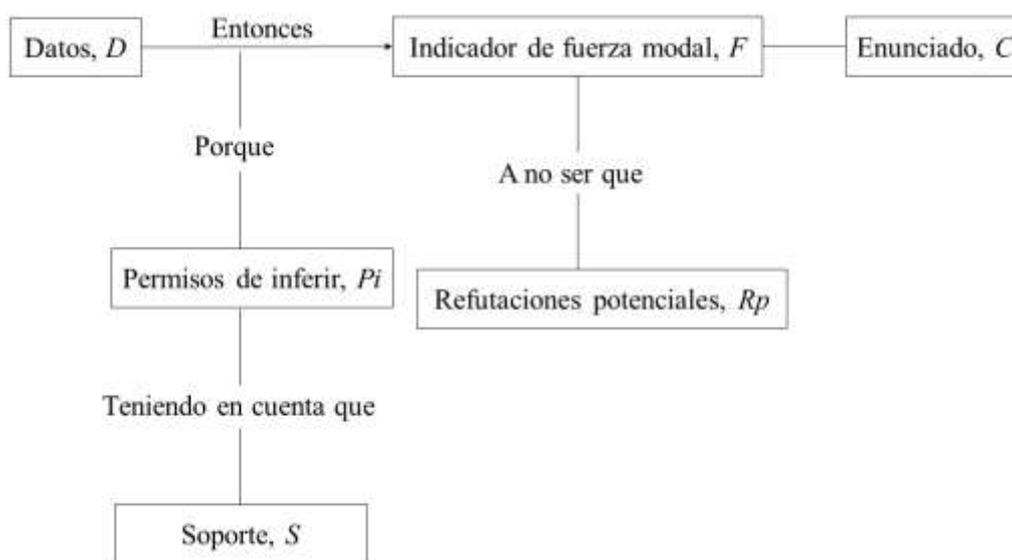
Una de las decisiones que debe tomar el investigador que desee trabajar en esta línea, es su posicionamiento sobre lo que considera argumentación. Esto marca el rumbo al momento de hacer el análisis de la información donde se buscan los segmentos de argumentación para luego identificar sus componentes, intencionalidades o propósitos.

### Tercera categoría: marcos de análisis usados

Una constante en este tipo de estudios es el uso del modelo de Toulmin (2003), el cual surge como una crítica a la argumentación deductiva en

respuesta a la argumentación sustantiva, la cual se basa en el análisis de premisas y conclusiones. Ofrece elementos para explicar desde un esquema lógico la estructura de un argumento.

Toulmin (2003), considera seis elementos relacionados con la argumentación (ver figura 1), entre ellos los datos  $D$  (data), los permisos de inferir  $P_i$  (warrant), el soporte  $S$  (backing), el indicador de fuerza modal  $F$  (modal qualifiers) del argumento, las refutaciones potenciales  $R_p$  (rebuttals) del enunciado conclusión y el enunciado  $E$  (claim) o conclusión.



**Figura 1.** Modelo de Toulmin.

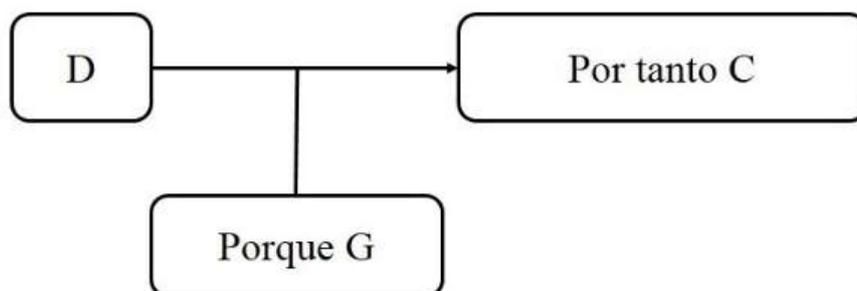
- Los datos  $D$  son hechos o evidencia con las que se cuenta para iniciar el proceso de argumentación.
- Los permisos de inferir  $P_i$  es una regla general o principio que sirve de fundamento para pasar de los datos al enunciado. Se manifiesta mediante una serie de afirmaciones que buscan establecer la relación entre los datos y el enunciado.
- El soporte  $S$  es la base para los permisos de inferir, este soporte autoriza los permisos de inferir y brinda motivos de validez.
- El indicador de fuerza modal  $F$  muestra el grado de certeza o la fuerza del enunciado.
- Las refutaciones potenciales  $R_p$  son las excepciones a la conclusión, casos particulares o contraejemplos.
- El enunciado  $C$  es la conclusión a la que se llega como resultado del proceso de argumentación.

Cuando una persona emite un argumento, toma en cuenta los datos y de acuerdo con la lectura que haga de estos, emite una conclusión o enunciado. En esa transición, se hace uso del permiso de inferir el cual teje un puente entre los datos y la conclusión. En ese sentido, el permiso de inferir es una regla o principio que permite establecer una conexión lógica, de modo que cuando se hace una refutación al argumento, lo que se cuestiona es el permiso de inferir, en consecuencia, el estudiante se ve inmerso en una situación en la que debe hacer más explícitos los permisos de inferir. Al darse la situación anterior, el estudiante puede recurrir al soporte para explicitar el permiso de inferir haciendo uso de justificaciones.

Si bien el modelo ha sido usado ampliamente en diversas investigaciones, Solar y Deulofeu (2016), indican que rara vez todos los elementos del modelo aparecen en una clase. En 1995

Krummheuer propone una reducción al modelo original de Toulmin tomando cuatro de sus elementos, datos, permisos de inferir, soporte y conclusión. Sin embargo, cada vez son más las investigaciones en las que se utiliza el modelo de Toulmin con tres de sus componentes, datos,

permisos de inferir o garantías y conclusión o aserción. Por ejemplo, Molina et al., (2019), usan la estructura ternaria del modelo de Toulmin para analizar la estructura de los argumentos analógicos, abductivos y deductivos (ver figura 2).



**Figura 2.** Reducción al Modelo de Toulmin propuesto por Krummheuer.

Por otro lado, algunas investigaciones han tratado de complementar el modelo de Toulmin para dar cuenta de otros aspectos en la argumentación tales como los conocimientos que movilizan los estudiantes al resolver un problema, nos referimos al modelo  $ck\zeta$  propuesto por Balacheff (1995). Este marco permite realizar un análisis cognitivo de las producciones de los estudiantes y brinda elementos al profesor para abordar las dificultades de aprendizaje y apoyar la evolución de este.

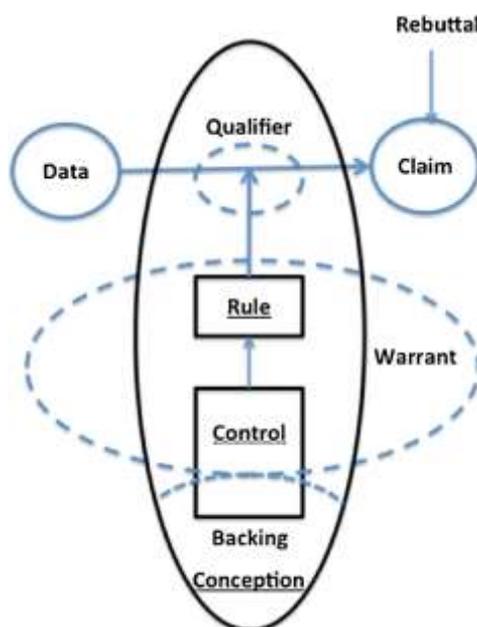
El modelo  $ck\zeta$  se compone de:

- P: un conjunto de problemas.
- R: un conjunto de operadores.
- L: un sistema de representación.
- $\Sigma$ : una estructura de control. (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 80)

Sobre la integración de ambos modelos, Pedemonte y Balacheff (2016), afirman que:

A efectos de la integración de ambos modelos, utilizamos el hecho de que para una determinada concepción  $(P, R, L, \Sigma)$  un problema matemático P puede ser representado por un conjunto de enunciados expresados mediante el sistema de representación L. Por lo tanto, la aplicación de una regla R (un operador) transforma un conjunto inicial de enunciados (datos) en un nuevo reclamo. La serie de transformaciones termina cuando se llega a un enunciado final que se afirma “verdadero” basado en la estructura de control  $\Sigma$ . Encadenando los esquemas de Toulmin que representan el desarrollo de la argumentación se hará entonces evidente que varias concepciones pueden contribuir a resolver un problema. (p. 107)

La forma como se integran los dos modelos se presenta en la figura 3.



**Figura 3.** Integración del modelo ckr al modelo de Toulmin (Pedemonte & Balacheff, 2016, p. 108)

Con este modelo se han hecho estudios para establecer relaciones de continuidad entre la argumentación y la prueba. Sin embargo, como ya se presentó anteriormente, gran parte de los estudios se enfocan en el desarrollo de la actividad argumentativa como una forma de hacer explícitos los razonamientos en clase, debatir su contenido, persuadir o refutar puntos de vista y construir conocimiento.

### Conclusiones

Cada vez más los estudios sobre argumentación matemática cobran relevancia, su inclusión en el currículo como competencia a desarrollar por los estudiantes desde los grados inferiores invita a vincularlos en la construcción del conocimiento desde perspectivas socioculturales. Uno de los desafíos a los que se enfrentan los profesores, es poder distinguir lo que se considera como argumentación y prueba, por eso, en este estudio se trata de poner de relieve las diversas posturas que se han desarrollado, esto permite que los profesores puedan situarse de manera conceptual, así como decidir sobre el modelo de análisis a utilizar para tipificar los argumentos en clase.

Es crucial, que los estudiantes se involucren en el desarrollo de prácticas argumentativas que les permitan desarrollar una visión crítica frente al conocimiento. Además, que les ayude a desenvolverse socialmente, de igual modo, los profesores deben desarrollar habilidades que les permitan identificar los momentos de argumentación en el aula y actuar en

consecuencia. Estudios como los de Conner et al. (2014), indican que las intervenciones del profesor ayudan a que los estudiantes mejoren sus niveles de argumentación. Ante esto, la formación continuada del profesorado debe proveerle herramientas conceptuales para su identificación en clase y la toma de decisiones.

En este estudio no se hace un análisis profundo dado que el objetivo es poner sobre la mesa las distintas posturas que se han considerado sobre la argumentación, su relación o distancia con la prueba y la importancia que ha despertado en algunos investigadores en educación matemática. Se espera que los elementos constitutivos del mismo sirvan de base para seguir la discusión y aportar más elementos que orienten a los investigadores noveles, que se interesan en la línea de argumentación y prueba a nivel de pregrado, maestría y doctorado.

### Referentes Bibliográficas

- Acosta, J., & Hermosa, R. (2015). La movilización de la Competencia Matemática “Razonar y Argumentar” a través del estudio de la Media Aritmética. *Amazonia Investiga*, 4(7), 6-18.  
<https://amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/690>
- Ayalon, M., & Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers’ attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 49, 163-173.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010>

- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). *cK4 Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques*. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-. frances
- Baudino, N., Velasco, J., Coleoni, E., & Buteler, L. (2019). La interacción mediante el habla: Una revisión del discurso en las aulas de ciencias. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, 14(2), 29-44.
- Benítez, A. A., Benítez, H., & García, M. L. (2016). La argumentación sustancial. una experiencia con estudiantes de nivel Medio superior en clases de matemáticas. *Educación Matemática*, 28(3), 175-216.
- Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria (Tesis doctoral), Universidad de Valencia, España. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=21772>
- Crespo, C. R. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología* (Tesis doctoral), Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México. Repositorio Dspace. <https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/705>
- Cervantes-Barraza, J., & Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en clase de geometría a nivel primaria. *Educación Matemática*, 30(1), 163-183. <https://doi.org/10.24844/EM3001.06>
- Chico, J. (2014). Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas (Tesis doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona, <https://www.tdx.cat/handle/10803/284869>
- Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 31-47. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.243>
- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 401-429. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8>
- Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(3), 283-306. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362010000300003](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000300003)
- De Gamboa, G. Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Suma*, 64, 35-44. [https://ddd.uab.cat/pub/artpub/2010/197062/SUMA\\_2010.pdf](https://ddd.uab.cat/pub/artpub/2010/197062/SUMA_2010.pdf)
- Durango, J. H. (2017). Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso (Tesis doctoral), Universidad de Antioquia. Repositorio Institucional UdeA.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233-261. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF00368340>
- Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Erkek, Ö., & Işksal-Bostan, M. I. (2019). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Global Argumentation Structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(3), 613-633. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9884-0>
- Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(3), 345-370. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2034>
- Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica (Tesis doctoral), Universidad de València. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=23802>
- Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145-167. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6>
- Goizueta, M., & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias*, 31(1), 61-78.

- [https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc\\_a2013v31n1/edlc\\_a2013v31n1p61.pdf](https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2013v31n1/edlc_a2013v31n1p61.pdf)
- Goizueta, M. (2015). Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas (Tesis doctoral), Universidad Autònoma de Barcelona. <https://ddd.uab.cat/record/133479>
- Goizueta, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students' conversations than meets the teacher's ear. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.007>
- Habermas, J. (1999). Teoría de la acción comunicativa I. Grupo Santillana de Ediciones.
- Hoyos, J. I. (2018). Implicaciones de la argumentación en clase para la enseñanza. Estudio de caso en un bachillerato en ciencias sociales (Tesis doctoral), Universidad de Valladolid. Repositorio documental Universidad de Valladolid, España. <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/33459>
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203053140>
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 60-82. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001>
- Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 51-74). Dordrecht, Holland: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_3)
- Kukliansky, I. (2019). Examining mathematics teachers' attitudes toward argument-based teaching. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4). Pretoria, South Africa: PME.
- Llanos, V., Otero, M., & Banks, L. (2007). Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, 2(2), 39-53. <http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7374>
- McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 111-133. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0702\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0702_2)
- Molina, Ó. J. (2019). Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación (Tesis doctoral), Universidad de Los Lagos, Chile. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html>
- Molina, Ó. J., Font, V., & Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 37(1), 93-116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484>
- Muller-Mirza, N., Perret-Clermont, A.-N., Tartas, V., & Iannaccone, A. (2009). *Psychosocial Processes in Argumentation*. In Nathalie Muller-Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 67-90) Boston: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_3)
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nielsen, J. (2011). Dialectical features of students' argumentation: A critical review of argumentation studies in science education. *Research in Science Education*, 43(1), 371-393. <https://doi.org/10.1007/s11165-011-9266-x>
- Otten, S., Bleiler-Baxter, S. K., & Engledowl, C. (2017). Authority and whole-class proving in high school geometry: The case of Ms. Finley. *Journal of Mathematical Behavior*, 46, 112-127. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.002>
- Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the  $\text{ck}\epsilon$ -enriched Toulmin model. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104-122. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008>
- Pedemonte, B., & Reid, D. (2010). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 281-303.
- Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. Editorial Gredos.
- Planas, N. (2007). The discursive construction of learning in a multiethnic school: perspectives from non-immigrant students. *Intercultural Education. European Journal of Intercultural Studies* 18(1), 1-14. <https://doi.org/10.1080/14675980601141805>
- Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

- Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa E Ensino*, 1, 1-21. <https://doi.org/10.37853/pqe.e202020>
- Rojas, C. (2006). Procesos de argumentación y demostración en un grupo de alumnos de ingeniería. *Zona Próxima: Revista Del Instituto de Estudios Superiores En Educación*, 7, 40-49. <http://www.redalyc.org/pdf/853/85300702.pdf>
- Ruiz, F. J. (2012). Caracterización y evolución de los modelos de enseñanza de la argumentación en clase de ciencias en la educación primaria (Tesis doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona. Depósito digital de documentos de la UAB. <https://ddd.uab.cat/record/107591>
- Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, 22(7), 412-419. <https://www.nctm.org/Publications/Teaching-Children-Mathematics/2016/Vol22/Issue7/Promoting-Mathematical-Argumentation/>
- Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 90(1), 1-17. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9616-0>
- Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 1(74), 155-176. <https://doi.org/10.17227/rce.num74-6902>
- Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 1092-1112. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13>
- Stylianides, G., Buchbinder, O., Cramer, J., Durand-Guerrier, V., Moutsios-Rentzos, A., & Valenta, A. (2019). Introduction to the papers of TWG01: Argumentation and Proof. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02397987>
- Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>
- Van Eemeren, F. H., Grootendorst, R., Johnson, R. H., Plantin, C., & Willard, C. A. (2013). *Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments*. Routledge.
- Viholainen, A. (2008). *Prospective Mathematics Teachers' Informal and Formal Reasoning about the Concepts of Derivative and Differentiability*. University of Jyväskylä. <http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep115.pdf>
- Yopp, D. A. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 79-99. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.003>